Programme de colle n°30

semaine du 8 au 12 juin

Notions vues en cours

Chapitre 38 : Espérance, variance

- **Espérance** d'une v.a. réelle ou complexe ; notation $\mathbb{E}(X)$; espérance de v.a. ayant pour lois $\mathcal{B}(p)$, $\mathcal{B}(n,p)$ et $\mathcal{U}(\llbracket a,b \rrbracket)$
- V.a. constante égale à un scalaire λ ; v.a. presque sûrement constante (on notera dans les deux cas $X=\lambda$ abusivement) ; $\mathbb{E}(\lambda)=\lambda$
- Propriétés de l'espérance : linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaires ; v.a. centrée
- **Formule de transfert** ; espérance d'un produit de v.a. indépendantes
- **Variance** d'une v.a.r. ; notation $\mathbb{V}(X)$; formule $\mathbb{V}(X)=\mathbb{E}(X^2)-\mathbb{E}(X)^2$; variance de aX et de $X+b$; variance de v.a. ayant pour lois $\mathcal{B}(p)$ ou $\mathcal{B}(n,p)$. La formule pour la loi $\mathcal{U}(\llbracket 1,n \rrbracket)$ a été démontrée en cours mais il faut savoir la redémontrer pour s'en servir dans un exercice.
- Écart-type d'une v.a.r., notation $\sigma(X)$, v.a.r. centrée réduite, si $\sigma(X)>0$ alors $\dfrac{X-\mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ est une v.a.r. centrée réduite
- **Covariance** de deux v.a.r. ; notation $\operatorname{Cov}(X,Y)$, interprétation, v.a. positivement / négativement corrélées ; formule $\operatorname{Cov}(X,Y)=\mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$
- Propriétés de la covariance : bilinéarité, symétrie, $\operatorname{Cov}(X,X)=\mathbb{V}(X)$; identité remarquable $\mathbb{V}(X+Y)=\dots$
- V.a. décorrélées, deux v.a. indépendantes sont décorrélées mais la réciproque est fausse
- Inégalité de Markov et inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Les exercices pourront naturellement porter également sur les concepts étudiés dans les deux chapitres précédents de probabilités : indépendance, conditionnement, loi de variable aléatoire, etc.

Le chapitre des séries numériques a été commencé (et est disponible sur le site) mais ne sera pas évalué pendant cette colle.

Les questions de cours sont en page suivante

Questions de cours

Questions Flash. Une question de cours sans démonstration choisie par l'examinateur, sur laquelle on doit passer un temps minimal. Cette question est choisie parmi celles ci-dessous, après les questions longues (chapitres **35 à 37**).

Question Longue. *Sauf mention contraire, les démonstrations sont exigibles.* ***Les énoncés des définitions et théorèmes doivent être clairement... énoncés !***

1. Énoncer la formule de transfert (sans démonstration). On suppose que $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p > 0$. Déterminer l'espérance de $Y = \dfrac{1}{1+X}$. Chapitre 38, Théorème 38.8 et exemple qui suit

2.
   - Définition de la variance, énoncé et preuve de son expression alternative.
   - Définition de la covariance et énoncé de son expression alternative (sans démonstration).
   - Identité remarquable (avec démonstration)

   Chapitre 38, encadrés 38.10, 38.11, 38.17, 38.18, 38.20

3. Énoncer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev (sans démonstration). Puis : Exercice 9 du TD 38. Chapitre 38, Théorème 38.25

Questions Flash au programme :

Chapitre 38 :

- Donner la définition de l'espérance d'une v.a. $X : \Omega \to E$.
- Si $X \sim \mathcal{B}(p)$, que vaut $\mathbb{E}(X)$? et $\mathbb{V}(X)$?
- Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, que vaut $\mathbb{E}(X)$? et $\mathbb{V}(X)$?
- Si $X \sim \mathcal{U}(\llbracket a,b \rrbracket)$, que vaut $\mathbb{E}(X)$? Si $\lambda \in \mathbb{K}$, que valent $\mathbb{E}(\lambda)$ et $\mathbb{V}(\lambda)$?
- Soit $X : \Omega \to E$ et $f : E \to \mathbb{K}$. Rappeler la formule de transfert.
- Donner la définition de la variance d'une v.a. X ainsi qu'une expression alternative.
- Compléter les formules : $\mathbb{E}(aX) = \dots$; $\mathbb{E}(X+b) = \dots$; $\mathbb{V}(aX) = \dots$; $\mathbb{V}(X+b) = \dots$
- Donner la définition de la covariance de deux v.a. X et Y ainsi qu'une expression alternative.
- Compléter la formule $\mathbb{V}(X+Y) = \dots$
- Que signifie que X et Y sont décorrélées ? Quel est le lien logique avec l'indépendance de X et de Y ?
- Compléter l'inégalité de Markov : soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et $a > 0$. On a : ...
- Compléter l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev : soit X une v.a. et $\varepsilon > 0$. On a : ...

Chapitre 37 :

- Donner la définition ensembliste de $\{X \in A\}$ et de $\{X = x\}$
- Soit $X : \Omega \to E$. Préciser ce qu'on appelle la loi de X (ensembles de départ, d'arrivée, notations)
- On suppose que X suit une loi de Bernoulli. Compléter la notation : $X \sim \dots$ en introduisant le ou les paramètres utilisés. Quelles sont les valeurs que peut prendre X ? Donner la loi de X.
- Même question que le point précédent avec une loi binomiale.
- Même question que le point précédent avec une loi uniforme.
- Que signifie "X et Y ont la même loi" en termes de quantificateurs ?
- Que signifie "X et Y sont indépendantes" en termes de quantificateurs ?
- Que signifie "$X_1, \cdots, X_n$ sont indépendantes" en termes de quantificateurs ?

- Soit X, Y, Z trois v.a. indépendantes. Peut-on assurer que les v.a. X^Y et $\ln Z$ sont indépendantes ? Même question avec les v.a. e^{XZ}, e^{XY} et e^{YZ}.
- Qu'appelle-t-on la loi conjointe du couple (X, Y) ? et les lois marginales de (X, Y) ?

Chapitre 36 :

- Que signife "A est un évènement de Ω" ? Si $\mathbb{P}$ est une probabilité sur Ω, quels sont ses ensembles de départ et d'arrivée ?
- Qu'appelle-t-on une distribution de probabilités sur un univers Ω ?
- Que doivent vérifier A et B pour que $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$? Que devient cette formule dans le cas général ?
- À quelle condition est-ce que $\mathbb{P}(A \mid B)$ a un sens ? Que vaut $\mathbb{P}(A \mid B)$ par définition ?
- Énoncer la formule des probabilités composées
- Énoncer la formule des probabilités totales
- Énoncer la formule de Bayes
- Que signifie "A et B sont indépendants" ? et "$A_1, \cdots, A_n$ sont mutuellement indépendants" ?